Transitiver Tausch und kapitalistischer Prozess

Stephan Jank · Robert Kravanja

Veröffentlichung Verlag Hans D. Smoliner, Villach, Juni 2026

ISBN Nr.: 978-3-9505938-8-4

Abstract

Die vorliegende Arbeit versteht sich als request for comment. Ausgehend von einer Formalisierung des kapitalistischen Tausches als *synchronen*, *transparenten*, vor allem aber als *transitiven* Tausch zeigen wir, dass einer Tauschmatrix *genau dann* ein solcher *transitiver* Tausch zugrunde liegt, wenn sie in einer speziellen Weise und ausschließlich durch die Bewertung der Warenknoten des Tauschgraphen konstruiert ist. In der Folge diskutieren wir Bedingungen, welche eine, gewissermaßen neu hinzutretende *Geldware* in einem solchen Modell erfüllen muss, wenn sie von den Tauschpartnern als Mittel zur Synchronisation zweier oder mehrerer ansonsten asynchron erfolgender Tauschhandlungen akzeptiert werden soll. Dabei zeigt sich, dass das bisher entwickelte zeitlich *diskrete* Tauschmodell zur Ableitung einer solchen Bedingung nicht ausreicht und daher um eine zusätzliche, zeitabhängige Komponente erweitert werden muss. Um aber die erforderliche Zeitabhängigkeit in das Modell aufzunehmen, erweist sich der Begriff des *Wertes* einer Ware als unverzichtbar. Wir definieren ihn – im Gegensatz zu gängigen makroökonomischen Traditionen – als den *Anteil am Gesamtportfolio*, den man durch den Verkauf einer ihrer Einheiten erheischen kann. Dieser zeitabhängige Wertbegriff erlaubt es dann, den kapitalistischen *Prozess* als andauernden Kampf gegen die permanente Entwertung der Waren zu fassen, mathematisch präzisiert in einem System linearer Differentialgleichungen, dessen Systemmatrix gerade die Tauschmatrix ist und dessen Lösung aufgrund der speziellen Struktur dieser Matrix auch noch in geschlossener Form angegeben werden kann. Den Abschluss bildet dann die aus dieser Differentialgleichung folgende erwähnte Bedingung, der die Geldware unterworfen werden muss, wenn sie auf jene performative Akzeptanz stoßen soll, wie sie dies in der Realität ja auch tut.

Inhaltsverzeichnis

1 Tausch

Der Kapitalismus hat eine historisch einzigartige Form des Tausches zur *einzigen* elementaren Form gesellschaftlich relevanter, menschlicher Interaktion erhoben. Jedes Handeln (sic!), das gesellschaftliche Wirkkraft entfalten will oder auf diese Wirkkraft angewiesen ist, muss im Kapitalismus daher zwingend ein Handeln sein, welches sich in diese spezifische Form des Tausches pressen lässt. Jedes andere Handeln verbannt der Kapitalismus in die gesellschaftliche Marginalie des „Privaten“. Und so müssen die allermeisten unserer Tätigkeiten, nämlich all jene, welche diese Form des Tausches suspendieren (müssen!), so sie je ein gewünschtes Resultat hervorbringen sollen, notwendig privat erfolgen: Die stoffliche Reproduktion in privaten Unternehmen, die biologische Reproduktion in der Privatheit der Familien, die Reproduktion sozialer Kontakte in der Privatheit der Clubs und so weiter und so fort.

Der Staat mitsamt allen ihm übertragenen, (scheinbar) gesellschaftlichen Aufgaben ist dabei keine Ausnahme sondern gerade die Bestätigung der Regel. Denn seine Existenz ist ausschließlich dem kapitalistischen Eingeständnis geschuldet, dass eben dieser Tausch als *einzige* gesellschaftlich relevante Form menschlicher Interaktion nicht etwa naturphänomenal ist, sondern den Menschen in Wirklichkeit erst repressiv aufgeherrscht werden muss. Diese militante Verbannung aller essentiellen menschlichen Lebensäußerungen in die gesellschaftliche Marginalie des Privaten ist der eigentliche kapitalistische Skandal. Warum, so ist man also geneigt zu fragen, lassen wir uns das gefallen?

Vor diesem Hintergrund ist es gar nicht so bemerkenswert, dass die orthodoxe ökonomische Literatur der Frage, *wie* (genau) wir tauschen, eine geradezu verschwindende Bedeutung beimisst, während sich die Autoren seit Jahr und Tag vortrefflich darüber streiten, *warum* wir (so) tauschen. Ihre Debatten wirbeln dabei regelmäßig so viel Staub auf, dass der Blick auf die eigentlichen Komplikationen des von ihnen meist nur als *simpel* vorgestellten Tausches völlig verstellt wird.

Dabei beantwortet sich die Frage nach dem Warum des Tausches – so sie nicht bürgerlich, also transhistorisch gestellt ist – von selbst: Weil die ständige Exekution von Tauschhandlungen im Kapitalismus unsere einzige Möglichkeit darstellt, Teilhabe am gesellschaftlichen Gesamtprodukt zu erlangen. Jede andere Möglichkeit dazu haben wir uns bei Strafe unseres eigenen existenziellen Ruins verbaut. Somit kann Tausch im Kapitalismus nie das Resultat einer selbstbestimmten Entscheidung autonomer Subjekte sein, wie sehr sich zwei Tauschpartner auch immer gegenseitig diesen Status einreden mögen. Das Warum ihres Tausches erklärt sich ausschließlich aus ihrem Zwang zur Befolgung des kapitalistischen Tauschimperativs. Wir werden deshalb durchgängig jede Frage nach einem Warum des Tausches ausklammern (können) und uns auf die (logische) Analyse jener historisch einzigartigen Form beschränken, in der der Tausch im Kapitalismus zur *einzigen* gesellschaftlich relevanten Form menschlicher Interaktion aufsteigen konnte.

1.1 Synchroner Tausch, Portfoliomatrix

Unter *synchronem Tausch* verstehen wir ein geschlossenes, zeitlich unlimitiertes System (Menge) von Tauschhandlungen, bei denen je zwei getauschte Warenmengen[1] ohne zeitliche Verzögerung, also exakt zum Zeitpunkt der Tauschhandlung, ihre jeweiligen Besitzer wechseln. Eine synchrone Tauschhandlung koppelt damit je zwei instantane Besitzabgaben auf noch zu bestimmende Weise an je zwei instantane Inbesitznahmen zweier Warenmengen durch die an der Tauschhandlung beteiligten Tauschpartner. Synchron getauschte Waren sind also zu keinem Zeitpunkt „herrenlos“. Zu jedem Zeitpunkt seien mit

$$m \in \mathbb{N}$$

die Anzahl der beteiligten *Tauschpartner* und mit

$$n \in \mathbb{N}$$

die Anzahl der getauschten *Waren* gegeben. Die Einträge $q_{ih} \geq 0$ der *Portfoliomatrix*

$$(q_{ih}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

geben an, wie viele Einheiten der Ware i der Tauschpartner h besitzt. Die h-te Spalte dieser Matrix nennen wir das *Einzelportfolio* des Tauschpartners h. Summiert man die Einzelportfolios aller Tauschpartner, bildet man also die Zeilensummen der Matrix, so erhält man das *Gesamtportfolio*

[1] Der Begriff *Ware* bleibt an dieser Stelle unreflektiert, wird aber ausschließlich in seiner umgangssprachlichen Bedeutung verwendet. Der Leser möge ihn bei Bedarf durch *Tauschobjekt* oder *getauschtes Objekt* ersetzen.

$$q = \sum_{h=1}^{m} q_{ih},$$

dessen i-ter Zeile man die Anzahl der im gesamten System vorhandenen Einheiten der Ware i entnimmt. Es ist klar, dass sich die Einzelportfolios der Tauschpartner – und damit natürlich auch das Gesamtportfolio – durch natürlichen Nachwuchs bzw. Rohstofffunde vergrößern, durch Produktion und Distribution verändern und endlich durch Konsumption bzw. Verrottung wieder verringern.

1.2 Tauschrelationen, Tauschmatrix

Konstituierend für jeden Tausch sind die von ihm vorausgesetzten und von den Tauschpartnern zu jedem Zeitpunkt beliebig verhandelbaren n^2 *Tauschrelationen*

$$r_{ij} \neq 0,$$

welche für je zwei Waren i bzw. j angeben, wie viele Einheiten der Ware i im Tausch gegen eine Einheit der Ware j gegeben werden muss. Diese Tauschrelationen fassen wir zu jedem Zeitpunkt in der quadratischen *Tauschmatrix*

$$R \overset{\text{def}}{=} \left(r_{ij}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

zusammen. Die Forderung nach dem Nichtverschwinden der Tauschrelationen bildet keine Einschränkung für unsere weitere Darstellung, zumal eine verschwindende Tauschrelation r_{ij}=0 das Geben von 0 Einheiten der Ware i im „Tausch" gegen eine Einheit der Ware j fordern würde. Damit fiele die Ware j aber der freien Entnahme anheim. Als Tauschobjekt kann sie dann aber nicht mehr gelten und entzieht sich damit dem Fokus unserer Untersuchung.

Der Leser möge sich aber der Tatsache gewahr sein, dass wir zur Erlangung unserer Ergebnisse weder an dieser Stelle noch irgendwo im weiteren Verlauf der Darstellung die Positivität der Tauschrelationen fordern (müssen). Wir lassen also durchgängig auch *negative* Tauschrelationen zu. Um ein Verständnis für solche Tauschrelationen zu entwickeln, denke man etwa an Giftmüll, dessen Geben in der Regel nicht an ein entsprechendes Nehmen gekoppelt ist, sondern ganz im Gegenteil das Geben einer weiteren Ware (meist Geld[2]) erfordert. Genau solche Fälle sind mit entsprechenden negativen Einträgen in der Tauschmatrix korrekt abgebildet. Das Signum der Tauschrelation reglementiert gewissermaßen die Richtung des Flusses jener Ware i, die im Tausch gegen eine Einheit der Ware j *gegeben* oder (im negativen Falle) *genommen* werden muss. Für die Dimensionen der Matrixelemente gilt natürlich die Beziehung

$$\dim(r_{ij}) := \frac{\dim(i)}{\dim(j)}.$$

1.3 Transparenter Tausch

Werden diese Tauschrelationen nun (wenigstens tendenziell) für jede einzelne Tauschhandlung individuell festgelegt, so bietet sich zur Benennung einer solchen Art des Tausches der Begriff *Basar* an. Prototypisch überantwortet dieser die Größe einer Tauschrelation dem individuellen Verhandlungsgeschick je zweier Tauschpartner und setzt so jedem Handel zweier Objekte zwingend das Verhandeln zweier Subjekte voraus. Ein solcher Tausch aber hat nicht das Zeug, sich zur einzigen gesellschaftlich relevanten Interaktionsform zu entwickeln. Wo immer es ihn deshalb heute noch gibt, befindet er sich

[2]Was immer das beim derzeitigen Stand der Darstellung auch ist.

in der ökonomischen Marginalie der Touristenattraktion oder in der Privatheit der organisierten oder unorganisierten „Kriminalität“.

Was die Karriere des Basars verhindert, ist die in ihm herrschende Intransparenz der Tauschrelationen. Ausgangspunkt unserer Darstellung kann folglich nicht die Beschreibung des Basars sein, sondern vielmehr die Beschreibung jener (mittlerweile hoch automatisierten) Märkte, wie man sie etwa an jeder der unzähligen Börsen unserer Welt vorfindet. Für Verhandlungen über die Tauschrelation zweier Waren bliebe dort noch nicht einmal die dafür nötige Zeit. Handeln und Verhandeln sind dort notwendig entkoppelt, wo hingegen Handel und Handlung zu einer Einheit verschmelzen. Solche Märkte müssen anderen Prinzipien folgen als der intransparente Basar – und sie tun es auch, denn im Gegensatz zum Basar zeichnen sie sich (wenigstens tendenziell) durch die völlige Transparenz ihrer Tauschrelationen aus. Unsere Darstellung wird also in ihrem weiteren Verlauf durchgängig voraussetzen (dürfen), dass die Tauschrelationen zu jedem Zeitpunkt allen Tauschpartnern in gleicher Form und vollem Umfang bekannt sind. Wie sonst sollten Algorithmen den weltweiten Handel übernehmen können? Dass sie es bereits tun, ist empirisches Fakt. Wir betrachten daher nur Tauschformen, welche die genannten Bedingungen erfüllen und nennen einen solchen Tausch **transparenten Tausch**.

1.4 Transitiver Tausch

Die Transparenz lässt den Basar zwar weit in die Nähe heutiger Märkte rücken, sie alleine aber liefert noch lange keine Garantie für die nachhaltige Aufrechterhaltung des dort stattfindenden Tausches. Denn es ist klar, dass die n^2 Tauschrelationen r_{ij} nicht völlig beliebig gewählt werden können, wenn der Tausch über lange Zeiträume aufrecht erhalten bleiben soll. Menschen meiden nämlich Veranstaltungen, bei denen sie permanent Gefahr laufen, über den Tisch gezogen zu werden. Einerlei ob das im Licht des Marktes oder im Dunkel des Basars geschieht. Damit aber genau das nicht schon bei der erstbesten Tauschhandlung passieren kann, müssen zumindest einmal für alle $1 \leq i, j \leq n$ die Gleichungen

$$r_{ji} = \frac{1}{r_{ij}}$$

erfüllt sein. Die Verletzung auch nur einer dieser Forderungen wäre absurd. Sind nämlich 7kg Kirschen für 1kg Weizen zu geben, so muss es umgekehrt genau $1/7$kg Weizen sein, der für 1kg Kirschen zu geben ist. Wären es weniger als $1/7$kg Weizen, würde sich niemand seine Kirschen mit Weizen „bezahlen“ lassen; wären es mehr, so hätte man mit Kirschen keine Chance, an Weizen zu gelangen. Als Waren im gängigen Sinne würden sowohl der Weizen wie auch die Kirschen ausscheiden. Sind diese Forderungen aber erst einmal erfüllt, so sind neben der Hauptdiagonale der Tauschmatrix auch alle darüber- oder (je nach Betrachtung) darunterliegenden Einträge der freien Verhandelbarkeit durch die Tauschpartner entzogen. Man überlegt leicht, dass sich dadurch die Anzahl der, von den Tauschpartnern frei verhandelbaren Einträge in der Tauschmatrix von ursprünglich n^2 auf nunmehr

$$\frac{n^2\text{-}n}{2}$$

reduziert. Das ist eine nicht unbeträchtliche Vereinfachung, hat sich doch der ursprüngliche Aufwand zur Bewertung der Kanten des von der Tauschmatrix induzierten Graphen um mehr als die Hälfte verringert. Aber kann ein Tausch allein durch diese Einschränkungen schon den Anspruch auf Nachhaltigkeit erheben? Die Antwort lautet: Nein! Es ist nämlich bemerkenswert, dass die genannten Forderungen *bei weitem nicht* ausreichen, um dem zugrunde liegenden Tausch jene Nachaltigkeit zu verleihen, die ihm im Kapitalismus seine uneingeschränkte Dominanz verschafft.

Um das zu sehen, betrachten wir das Beispiel eines Tausches mit den 3 Waren Kirschen, Weizen und Zahnpasta, dessen Graph
von der Matrix

$$(r_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

induziert wird. An ihr erkennt man sofort, dass sie die genannten Forderungen zur Gänze erfüllt. Wir nennen eine solche Matrix *transponiert reziprok*. Trotzdem wird sich Hans, der 7kg seiner Kirschen (etwa aus Zeitmangel) direkt gegen 1kg Weizen getauscht hat, zurecht übervorteilt fühlen, wenn ihm Gustav erzählt, er hätte für nur 6kg seiner Kirschen 2 Tuben Zahnpasta erhalten, welche er letztlich auch gegen 1kg Weizen tauschen konnte. Hans hätte hier also durch „ungeschickten" Tausch einen „Verlust" von 1kg Kirschen hinnehmen müssen. Einem solchen Markt wird Hans zukünftig mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht mehr vertrauen und sich zur Deckung seines Weizenbedarfs (oder zum Absatz seines Kirschenangebotes) wohl einen anderen Markt suchen.

Das Argument mag am vorliegenden Beispiel vielleicht fadenscheinig wirken. Der Leser möge sich aber eine ähnliche Situation anhand eines (völlig transparenten!) Tausches mit 10, 20 oder noch mehr Waren vor Augen führen. Die dort dem Cleverle Gustav abverlangte Rechenleistung wäre von diesem nur mit sehr hohem Aufwand zu erbringen. Und wenn er seine Rechnung, die in Wirklichkeit die Lösung eines modifizierten shortest path problems erbringen muss, nicht vollständig und korrekt durchführt – wer weiß? Vielleicht gibt's dann ja ein noch gerisseneres Cleverle, das *ihn* dann als Gelackmeierten dastehen lässt. Trotz voller Transparenz und umfassender Erfüllung aller bisher erhobenen Forderungen (transponierte Reziprozität der Tauschmatrix) hätte auch ein solcher Tausch noch keine Karrierechancen.

Das Beispiel zeigt aber schon klar an, in welche Richtung dieser Tausch modifiziert werden muss, wenn sichergestellt sein soll, dass er zu *keinem Zeitpunkt* Gelackmeierte und/oder Cleverles hervorbringen kann. Die Betonung liegt hier übrigens auf dem Wort *Zeitpunkt*, denn natürlich werden sich Gewinne und damit auch Verluste durch reine Tauschhandlungen auch im Falle eines solcherart modifizierten Tausches erzielen lassen. Allerdings nur dann, wenn zwischen den betrachteten Tauschhandlungen auch genügend Zeit verstreichen konnte, während der sich die Tauschrelationen (innerhalb der noch zu benennenden Einschränkungen) ja auch beliebig verändern konnten. Der Leser stelle sich dazu etwa einen Markt vor, dessen Tauschrelationen nur am Beginn eines Markttages verändert werden können, *während* dieses Tages aber fixiert bleiben. Dann darf es dort eben innerhalb eines Tages nicht zu Vorkommnissen wie den eben geschilderten kommen können.

Wie müssen wir nun den bisher vorgestellten Tausch weiter einschränken, wenn wir sicherstellen wollen, dass zu keinem Zeitpunkt „Verluste" oder „Gewinne" durch „geschickte" oder „ungeschickte" Tauschhandlungen (Täuschungen) erzielt oder erlitten werden können? Offensichtlich – und das zeigt ja das Beispiel deutlich – müssen vom Tauschgraphen zu jedem Zeitpunkt sämtliche gerichtete Dreiecke ausgeschlossen (oder entsprechend modifiziert) werden, die über einen „Umweg" den günstigeren Erwerb einer Ware ermöglichen als es der direkte Weg erlaubt. Mathematisch ausgedrückt müssen also zu jedem Zeitpunkt für je 3 Waren $1 \leq i, j, k \leq n$ und deren Tauschrelationen die Gleichungen

$$r_{ij}=r_{ik}r_{kj}$$

erfüllt sein. Nur wenn alle Tauschrelationen diese Gleichungen erfüllen, ist sichergestellt, dass der Tauschgraph kein einziges (gerichtetes) Dreieck mehr enthält, das einen solchen „Umweg" ermöglichen würde. Es handelt sich dabei um n^3 Gleichungen, welche jede Art von Tauschverlusten und damit auch -gewinnen (also Täuschungen durch reine Tauschhandlungen) im Falle eines transparenten Tausches verunmöglichen. Einen Tausch, der diese an gängige Transitivitätsbedingungen erinnernden Gleichungen erfüllt, nennen wir **transitiven Tausch**.

Das eingangs angeführte Beispiel hat diese Gleichungen eben nicht zur Gänze erfüllt. So kann man seiner Matrix entnehmen, dass etwa die Beziehung

$$r_{12}=7 \neq 6=3 \cdot 2=r_{13}r_{32}$$

die von ihr geforderte Gleichheit nicht erfüllt, was auch prompt zum Auslöser von Hans' Missgeschick wurde. Das angeführte Beispiel lässt sich nun aber sehr leicht reparieren. So würde etwa die folgende Modifikation des Tauschgraphen

von der Matrix

$$(r_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ \frac{1}{7} & 1 & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

induziert, von der man sich mit relativ geringem Aufwand überzeugt, dass sie sämtliche der 3^3=27 Transitivitätsgleichungen erfüllt und somit Unglücke, wie sie im nicht modifizierten Fall möglich waren, ausschließt. Mathematisch stellt sich das bisher Gesagte also so dar: Die Matrix R eines transitiven Tausches ist zwingend transponiert reziprok; erfüllt also die Gleichung

$$R^T = \bar{R}.$$

Die Umkehrung dieser Aussage aber muss (und wird in der Regel auch) *nicht* gelten.[3]

1.5 Knotenbewertung statt Kantenbewertung

Hand aufs Herz! Haben sie für das angeführte Beispiel wirklich alle $3^3 = 27$ Transitivitätsgleichungen auf ihre Gültigkeit überprüft? Wenn ja: Gratulation zu ihrem Fleiß! Wenn nein, dann Gratulation zu ihrer Geduld! Denn es stellt sich heraus, dass sich dieser Aufwand erübrigt. Um das aber klar zu sehen hilft ein mathematisches Resultat, zu dessen Formulierung und Beweis sich die folgenden Vereinbarungen als nützlich erweisen:

Um bei der Bildung von Reziprokwerten lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, sei zunächst einmal

[3] Dies ist mit ein Grund, warum wir auf den Begriff *Äquivalententausch* zugunsten des Begriffes *transitiver Tausch* verzichtet haben. Ersterer legt seine Emphase nach unserem Geschmack eben zu sehr auf die transponierte Reziprozität der Tauschmatrix. Gleichwohl ist uns natürlich bewusst, dass das Konzept des Äquivalententausches in Marxens Wertformanalyse die vorliegende Definition eines transitiven Tausches in vollem Umfang überdeckt.

$$\dot{\mathbb{R}} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Als *reziproken Vektor* $\bar{p}$ eines Vektors $p = (p_i) \in \dot{\mathbb{R}}^n$ verstehen wir den Vektor

$$\bar{p} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{p_i}\right) \in \dot{\mathbb{R}}^n.$$

Wie üblich notieren wir die *Transposition* von Vektoren bzw. Matrizen mit hochgestelltem T:

$$p^T = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}^T = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n).$$

Eine Matrix $R \in \dot{\mathbb{R}}^{n \times m}$ nennen wir *transitiv*, wenn sie die Transitivitätsbedingungen

$$\forall 1 \leq i, j, k \leq n : r_{ij} = r_{ik} r_{kj}$$

erfüllt. Mit diesen Definitionen gilt nun das folgende

Lemma 1: Eine Matrix $R = (r_{ij}) \in \dot{\mathbb{R}}^{n \times n}$ ist genau dann transitiv, wenn es einen Vektor $p \in \dot{\mathbb{R}}^n$ gibt, sodass $R = \bar{p} p^T$

Beweis: Sei $R = (r_{ij}) \in \dot{\mathbb{R}}^{n \times n}$ transitiv, dann gelten für alle $1 \leq i, j, k \leq n$ die Transitivitätsbedingungen $r_{ij} = r_{ik} r_{kj}$. Setzt man jetzt sowohl $j = i$ als auch $k = i$, so erhält man für alle $1 \leq i \leq n : r_{ii} = r_{ii} r_{ii}$. Dividiert man diese Gleichung durch $r_{ii} \in \dot{\mathbb{R}}$, so erhält man

$$\forall 1 \leq i \leq n : r_{ii} = 1 \ (*)$$

Setzt man nun in den Transitivitätsbedingungen $k = j$ und $j = i$, so erhält man für alle $1 \leq i, j \leq n$ auch $r_{ii} = r_{ij} r_{ji}$. Nun erlaubt (*) $r_{ii} = 1$ zu setzen und wir erhalten für alle $1 \leq i, j \leq n : 1 = r_{ij} r_{ji}$. Dividiert man nun diese Gleichung durch r_{ij}, dann erhält man schließlich

$$\forall 1 \leq i, j \leq n : r_{ji} = \frac{1}{r_{ij}} \ (**)$$

Wählt man nun die transponierte erste Zeile der Matrix als das postulierte p, setzt man also

$$p = (p_i) = (r_{1i})^T,$$

dann ist natürlich

$$\bar{p} p^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} \\ \frac{1}{p_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{p_n} \end{pmatrix} (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n) = \left(\frac{p_j}{p_i}\right) = \left(\frac{r_{1j}}{r_{1i}}\right) \in \dot{\mathbb{R}}^{n \times n}.$$

Der Leser mache sich klar, dass man an dieser Stelle auch jede andere, aber fixe(!) Zeile der Matrix wählen könnte. Denn mit jeder beliebigen, aber fixen(!) Wahl κ (statt 1) einer Zeile ergibt sich insgesamt, wegen (**) und der Transitivität der Matrix

$$\bar{p} p^T = \left(\frac{p_j}{p_i}\right) = \left(\frac{r_{\kappa j}}{r_{\kappa i}}\right) = (r_{i\kappa} r_{\kappa j}) = (r_{ij}) = R.$$

Sei nun umgekehrt $R = \bar{p}p^T$ mit einem Vektor $p \in \dot{\mathbb{R}}^n$ und damit $r_{ij} = \frac{p_j}{p_i}$ für alle $1 \leq i,j \leq n$, dann gilt aber auch für alle $1 \leq i,j,k \leq n$

$$r_{ik}r_{kj} = \frac{p_k}{p_i}\frac{p_j}{p_k} = \frac{p_j}{p_i} = r_{ij}.$$

Damit aber ist R auch transitiv. □

Dies verändert nun die Situation der Tauschpartner auf dramatische Weise. Wollen sie nämlich ihre Tauschgeschäfte zukünftig in unserem Sinne transitiv (und damit über längere Zeiträume stabil) betreiben, so kommt ihnen durch Lemma 1 plötzlich die Verhandelbarkeit der weitaus meisten Einträge in ihrer Tauschmatrix abhanden. Wir erinnern uns: Waren es im ursprünglichen, nicht transitiven Fall eines reinen ‚Äquivalententausches ja noch

$$\frac{(n^2\text{-}n)}{2}$$

Einträge, die sie frei und völlig beliebig verhandeln konnten, so hat sich diese Anzahl auf nunmehr nur noch

$$n$$

reduziert. Das ist ein durchaus bemerkenswertes Resultat. Denn es besagt, dass der Zwang zur Erfüllung der Transitivitätsbedingungen die ursprüngliche Notwendigkeit einer *Kantenbewertung* des Tauschgraphen in jene einer reinen *Knotenbewertung* verwandelt.

Wie Schwämme saugen die Knoten (=Waren) des Graphen im Falle des transitiven Tausches die ursprünglich *zwischen* ihnen bestehenden Tauschrelationen in sich auf. Denn allein durch *ihre* (beliebige aber isolierte!) Bewertung sind automatisch auch die quantitativen Beziehungen *zwischen* ihnen festgelegt. Wer also transitiv tauscht, der muss die Beziehungen, die ja nach wie vor *zwischen* seinen Waren bestehen, geradezu zwingend aus den Augen verlieren. Denn die Transitivität ihres Tausches entreißt den Tauschpartnern das Regime über diese Beziehungen indem es diese gewissermaßen den Waren selbst überantwortet. Der Leser mache sich an dieser Stelle noch einmal klar, dass es sich bei diesem Phänomen nicht bloß um eine *Folge* des transitiven Tausches handelt, sondern dass dieser mit diesem Phänomen (logisch) *äquivalent* ist.

Wir weisen darüber hinaus explizit darauf hin, dass das bisher Gesagte über die Art und Weise, *wie* die Tauschpartner ihre Knoten (=Waren) bewerten, überhaupt keine Aussage trifft. Diese Bewertungen sind ja nach wie vor völlig frei verhandelbar. Ob sie diesen also einen wie immer gearteten, psychologischen „Grenznutzen" zugrunde legen oder ein Quantum abstrakter Arbeit, das in die Produktion der zu bewertenden Waren geflossen ist, ist vor diesem Hintergrund völlig belanglos. Sie könnten diese Bewertungen genauso gut dem Zufall überlassen. Eine *spezielle* Bewertung der Warenknoten ist also gerade so gut wie jede andere und damit zur Konstitution eines transitiven Tausches in keiner Weise erforderlich.

Man könnte auch sagen: Nicht weil zwei Objekten etwas *qualitativ* „Gleiches" innewohnt, werden sie *quantitativ transitiv* getauscht. Es ist geradezu umgekehrt: Weil sie *quantitativ transitiv* getauscht werden, erhalten sie zwingend etwas *qualitativ* „Gleiches". Und dieses qualitativ „Gleiche" erweist sich als ihr gemeinsamer (transitiver!) Bezug auf alle anderen Waren des Systems.

Die Verhandelbarkeit der Beziehungen *zwischen* ihren Waren *müssen* die Tauschpartner also der Transitivität ihres Tausches opfern. Nicht mehr sie selbst, sondern einzig ihr transitiver Tausch regelt fortan die Beziehungen zwischen ihren Waren und damit letztlich auch die Beziehungen zwischen ihnen selbst. Was sich ihnen also anfänglich vielleicht als selbst erschaffener Schutz vor Täuschungen durch Ihresgleichen dargestellt haben mag, entpuppt sich schon im nächsten Augenblick als ihr allmächtiger Gott.

1.6 Referenzware und „allgemeine Äquivalentform“

Für unser anfängliches Beispiel eines *nicht transitiven* Tausches ergibt sich daraus folgende Möglichkeit zur Konstruktion einer *transitiven* Tauschmatrix: Wir ziehen mit den Kirschen (i=1) die erste Zeile

$$p^T := \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \end{pmatrix},$$

der ursprünglichen Matrix zur Bewertung der Knoten im Tauschgraphen heran. Auf diese Weise werden die Kirschen zur *Referenzware*. Als Referenzware bezeichnen wir nämlich jene Ware, deren Tauschrelationen zu allen anderen Waren der von Lemma 1 geforderten Matrixkonstruktion zu Grunde gelegt werden (können). In unserem Beispiel verwandeln wir also die Bewertungen der mit der Referenzware inzidenten Kanten zur Bewertung der, mit ihr adjazenten (und damit natürlich aller) **Knoten.** Die vorgestellte Konstruktion garantiert nun, dass die dabei entstehende Matrix

$$R = \bar{p}p^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ \frac{1}{7} & 1 & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

einen transitiven Tauschgraphen induziert, von dem sämtliche 27 Transitivitätsbedingungen erfüllt werden. Genau dieses Vorgehen haben wir offensichtlich bei der „Reparatur“ der ursprünglich nicht transitiven Matrix im vorangegangenen Abschnitt gewählt. Hätten wir dabei nicht die Kirschen (die erste Zeile), sondern etwa den Weizen (die zweite Zeile) der ursprünglichen Matrix zur Bewertung der Warenknoten herangezogen, so hätten wir mit

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{1} \\ \frac{1}{1} \\ \frac{2}{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{7} & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

zwar eine andere Tauschmatrix als „Reparaturergebnis“ erhalten; ihre Transitivität aber wäre genauso garantiert gewesen. Der Unterschied der beiden „Reparaturergebnisse“ rührt offensichtlich daher, dass wir zwar von *ein und demselben* (aber eben *nicht transitiven*) Tausch ausgegangen sind, für die Matrixkonstruktionen dann allerdings zwei *unterschiedliche* Waren gewählt haben. Dies ist charakteristisch für den nicht transitiven Tausch: *Keine* der in ihm getauschten Waren taugt in seinem Fall als Referenzware.

Wäre der Tausch aber von vorneherein transitiv, seine Tauschmatrix also bereits „repariert“ gewesen, so hätte die Wahl der Referenzware bei der Matrixkonstruktion keine Rolle gespielt und wir hätten in beiden Fällen dieselbe Tauschmatrix erhalten. Der langen Rede kurzer Sinn ist also, dass im Falle des transitiven Tausches (aber auch *nur* in diesem Fall) *zu jedem Zeitpunkt* jede beliebige Ware als Referenzware (also zur angeführten Konstruktion seiner Tauschmatrix) herangezogen werden kann, ohne dass diese Konstruktion dabei zu immer anderen Ergebnissen führt. Keine andere Form des Tausches kann mit einem solchen Ergebnis aufwarten.

Damit kommt unsere Untersuchung an dieser Stelle zum selben Ergebnis, wie Karl Marx in seiner Wertformanalyse. Das von uns vorgestellte Konzept der, für die Konstruktion *ein und derselben* Tauschmatrix beliebig wählbaren *Referenzware* ist nämlich begrifflich bis ins letzte Detail deckungsgleich mit der, von ihm dort ohne mathematischen Kalkül entwickelten, *allgemeinen Äquivalentform*. Und über diese schreibt Marx ja: *„Sie [die allgemeine Äquivalentform] kann also jeder Ware zukommen.“*[4]

Der entscheidende Unterschied aber zwischen unserer und Marxens Entwicklung dieses Konzepts liegt in seiner theoretischen Fundamentierung und damit natürlich in seiner Interpretation. Während Marx zur Herleitung seines Ergebnisses den Tauschobjekten schon vorab einen, ihnen allen wesensgleich innewohnenden, ganz speziellen *Tauschwert* zuschreiben muss (in unserer Diktion: eine ganz spezifische Knotenbewertung des Tauschgraphen voraussetzen muss), kann unsere Herleitung gerade auf diese Voraussetzung verzichten.

Dies ist aber nicht etwa einer „anderen“ oder gar „schlechteren“ Logik geschuldet, die Marx seiner Herleitung zugrunde legt. sondern wohl ausschließlich der Tatsache, dass er der historisch spezifischen *Form* des kapitalistischen Tausches aus unserer Sicht gewissermaßen „zu wenig“ an verheerender Wirkkraft „zutraut“. Wenn sich jedoch die Transitivität dieser Tauschform (wie wir sie hier behaupten oder wenigstens deren Annahme als Fundament einer neuen Kapitalismusanalyse vorschlagen) halten lässt, dann ist diesem Misstrauen die Grundlage entzogen. Einzig und allein die *Form* des Tausches selbst erweist sich dann logisch sowohl als hinreichende Voraussetzung *für* als auch als notwendige Konsequenz *aus* der Möglichkeit, jede beliebige Klasse von Tauschobjekten (Ware) als „allgemeine Äquivalentform“ zu betrachten (als Referenzware heranzuziehen). Es besteht dann also folgende (logische) Äquivalenz:

$$\forall x\text{: x wird transitiv getauscht} \Leftrightarrow \text{x ist potentielle Referenzware}$$

2 Geld

Es mag dem Leser aufgefallen sein, dass die *Zeit* im Verlauf der bisherigen Darstellung eine eher untergeordnete Rolle gespielt hat. Und tatsächlich hat sie die Bühne bisher nur *diskret* betreten. Was immer wir bisher über den Tausch und seine Matrix ausgesagt haben, es galt *zu jedem Zeitpunkt*. Zur Erlangung der bisherigen Resultate war es daher an keiner Stelle nötig, irgendeine Kopplung zwischen zwei verschiedenen Zeitpunkten herzustellen. Es wird nun aber Zeit, die diskrete Zeitschiene zu verlassen.

2.1 Asynchrone Tauschhandlungen

Es ist ja mehr als einleuchtend, dass *synchroner* Tausch immer dort an seine Grenzen stoßen muss, wo Waren *nicht* exakt zum Zeitpunkt *einer* Tauschhandlung ihren Besitzer wechseln können (oder sollen). Man denke etwa an Hans, der im Herbst ein paar Säcke Weizen benötigt, dessen Kirschen aber erst (oder schon) im Frühjahr reif sind. Zugegeben, in diesem simplen Beispiel könnte die gewünschte Tauschsynchronisation auch durch geeignete Lagerung oder Konservierung der beteiligten Waren lukriert werden. Was aber, wenn diese Möglichkeit strukturell ausgeschlossen ist? Was, wenn etwa menschliche Arbeit ihren Besitzer wechseln soll? Synchron ist dieser Besitzwechsel nicht zu

[4]MEW 23, 83

haben, beansprucht doch die pure Existenz der Arbeit bereits jene *Zeitspanne*, die zu ihrer Verrichtung nötig ist. Und jeder weitere Blick auf die kapitalistische Realität zeigt sofort, dass es eine schier unüberblickbare Vielfalt solcher zeitgebundener Prozesse gibt, die trotz ihrer strukturellen Asynchronizität dem rigiden Regime des synchronen Tausches unterworfen werden (können).

Die Notwendigkeit zur Synchronisation solcher asynchroner Tauschhandlungen verändert nun erstmals die Rolle, welche die Zeit im vorgestellten Tauschmodell spielt. Sie wird plötzlich zu einem bestimmenden Faktor, dessen Berücksichtigung weitreichende Konsequenzen nach sich zieht. Dabei ist es unerheblich, ob diese Asynchronizitäten – etwa durch geeignete Lagerung oder Konservierung – *behebbar* oder ob sie struktureller Natur, also – wie im Falle menschlicher Arbeit – *nicht behebbar* sind. Denn asynchrone Tauschhandlungen, also Tauschhandlungen, die nicht unvermittelt (synchron bzw. instantan) zum gewünschten Besitzwechsel zweier Warenmengen führen (können), müssen die Durchführung dieses Besitzwechsels zwangsläufig einem geeigneten Vermittler übertragen. Würde eine asynchrone Tauschhandlung nämlich auf eine solche Vermittlung verzichten, so zerfiele sie zwangsläufig in eine Sequenz mindestens zweier Schenkungen, deren spätestens zweite den Unwägbarkeiten des historischen Prozesses ausgeliefert wäre. Das aber ist im Kapitalismus nur „unter Freunden", niemals aber inter homines oeconomicos zu haben.

2.2 Die Geldware

Wer oder was übernimmt nun im Kapitalismus diese zeitinduzierte Vermittlerrolle? Oder präziser gefragt: Wen oder was stattet der Kapitalismus mit einem so starken Mandat aus, dass er oder es diese Rolle übernehmen kann? Schon ein kurzer Blick auf die kapitalistische Realität liefert darauf sofort die Antwort: das *Geld*. Aber was ist Geld?[5] Oder weniger ontologisch gefragt: Wie muss Geld modelliert werden, damit es in einem transitiven Tauschsystem die von ihm geforderte Synchronisationsleistung auch tatsächlich erbringen kann? Und auch hier liefert die kapitalistische Realität einen ersten entscheidenden Hinweis. Geld wird ja – obwohl selbst ohne jeglichen stofflichen Nutzen – immer und überall problemlos, vor allem aber *transitiv* gegen jede andere Ware getauscht. Wenn also Geld auf Grund seiner stofflichen Nutzlosigkeit schon nicht der finale Zweck von Tauschhandlungen ist, so ist es im *transitiven* Tausch doch eine *Referenzware* und kann somit zur Konstruktion der Tauschmatrix herangezogen werden. Und das wird es natürlich auch. Denn die Tauschpartner bewerten ihre Warenknoten in der Realität ja nicht *direkt* mittels eines abstrakten Bewertungsvektors $p \in \dot{\mathbb{R}}^n$, sondern immer nur *indirekt* über die Festlegung der Preise ihrer Waren. Wenn der kapitalistische Prozess also auf der Basis des transitiven Tausches modelliert werden soll, dann muss es sich nach Lemma 1 beim Geld *substantiell* um eine Ware wie jede andere handeln. Diese weitere, gewissermaßen neu hinzutretende *Geldware* werden wir im Folgendem mit dem Buchstaben

$$G$$

[5] Wir weisen an dieser Stelle explizit darauf hin, dass das Geld in dieser Darstellung durch andere Eigenschaften bestimmt sein wird, als es das etwa in Marx' Kapital noch war. War das Geld nämlich bis spätestens 15. August 1971 noch an die Realware Gold gebunden, so hat Richard Nixon diese Bindung mit diesem Tag beendet, indem er mit der Gold-Kopplung des Dollars mittelbar auch jene von anderen, wesentlichen Währungen entsorgt hat. Geld kann somit nicht (mehr) als „Stellvertreter" einer, es „deckenden" Realware modelliert werden, sondern bedarf einer gesonderten Untersuchung

bezeichnen. Sie ist es, die aufgrund weiterer – noch zu bestimmender – Eigenschaften dafür sorgt, dass jede asynchrone Tauschhandlung aus einer Sequenz zweier oder mehrerer synchroner Tauschhandlungen zusammengesetzt werden kann, ohne dass ihr Gelingen (allzu sehr) den Unwägbarkeiten des historischen Prozesses anheimfiele. Wie jede andere Ware muss dann auch die neue Geldware ihren eigenen (natürlich frei bewertbaren) Knoten im Tauschgraphen des Systems erhalten. Der neue (Geld)Knoten im Tauschgraphen erhält hier den Index 1, wodurch sich die Indizes aller anderen Waren um 1 verschieben, was für unsere Betrachtungen aber überhaupt keine Rolle spielt. Genauso wenig übrigens, wie die Tatsache, dass sich durch den neu hinzutretenden Knoten die Anzahl n aller Waren auf $n+1$ erhöht. Diese Zahl war ja schon bisher völlig beliebig. Wir werden unsere Knoten also auch weiterhin mit dem Vektor

$$p^T = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \dot{\mathbb{R}}^n$$

bzw. ab und an auch über $G := 1$ mit

$$p^T = (p_G, p_2, \dots, p_n) \in \dot{\mathbb{R}}^n,$$

bewerten, um die Geldware bei Bedarf auszuzeichnen. Damit ist sichergestellt, dass die neue Geldware die Transitivität des vorhandenen Systems nicht verletzt, was natürlich inkludiert, dass auch (besser: insbesondere) *sie* als Referenzware herangezogen werden kann. Für die Einträge in der neu entstehenden „Geldzeile" der Tauschmatrix, also für die Tauschrelationen des Geldes zu allen anderen Waren

$$r_{Gj} = r_{1j} = \frac{p_j}{p_G} = \frac{p_j}{p_1}$$

bietet sich der Begriff *Preise* an. Eine Tauschhandlung, in deren Zug eine Geldmenge gegen eine bestimmte Menge einer anderen Ware getauscht wird, nennen wir entsprechend *Kauf*, ihr Gegenteil *Verkauf*.

2.3 Forderungen an die Geldware

Außer durch einige neue Begriffe unterscheidet sich eine so hinzutretende Geldware bisher durch nichts von allen anderen Waren des Tauschsystems. Es gibt also (noch) keinen wie immer gearteten Grund, warum ein solches Geld, das ja stofflich völlig nutzlos ist, auf ein derart hohes Maß an performativer Akzeptanz stoßen sollte, wie es dies in der kapitalistischen Realität tut. Wo also muss eine solche Unterscheidung gesucht bzw. gemacht werden?

Da im bisher entwickelten Modell des transitiven Tausches eine Ware j ausschließlich durch die zwei Größen p_j und q_j, also durch ihre Knotenbewertung und die von ihr vorhandene Gesamtmenge bestimmt sein kann, bietet auch die neu hinzutretende Geldware nur diese beiden Größen zur Bestimmung ihrer Eigenschaften an, wenn die Transitivität des Tausches nicht gefährdet werden soll. Was aber ist von p_G bzw. von q_G zu verlangen, damit die Geldware von den Tauschpartnern tatsächlich als Synchronisationsmedium akzeptiert wird? Wir behaupten, dass dafür zuallererst sowohl q_G der willkürlichen Produktion durch die Tauschpartner als auch p_G der freien Verhandelbarkeit durch dieselben entzogen werden müssen.

Nun wird niemand ein Problem damit haben, einzusehen, dass eine Geldware, deren Gesamtmenge q_G *nicht* der Willkür privater Produktion entzogen ist, als Synchronisationsmedium völlig untauglich wäre. Und tatsächlich wird das Anwachsen bzw. Schrumpfen der Geldmenge q_G in der Realität ja wesentlich von einem, durch die Zentralbank und die Geschäftsbanken rigide überwachten

System von Kreditvergaben und -rückzahlungen gesteuert, auf das die einzelnen Tauschpartner nur bedingt Einfluss haben.

Dass aber im zeitlich diskreten, transitiven Tausch p_G irgendeinen Einfluss auf die Realität der Tauschpartner hat und ihnen daher die Festlegung von p_G entzogen werden muss, erschließt sich an dieser Stelle in keiner Weise. Denn nach dem bisher Gesagten würde eine Änderung von p_G zwar durchaus eine Änderung der Tauschmatrix bewirken und damit die Realität der Tauschpartner auch tatsächlich verändern; in dem von uns *bisher* entwickelten zeitlich *diskreten* Tauschmodell tut sie dies aber (noch) nicht – zumindest nicht zwingend. Denn mit Ausnahme des Geldknotens bewerten die Tauschpartner sämtliche anderen Knoten nicht *direkt* mittels p_j, sondern immer nur *indirekt* durch die Festlegung der Preise r_{Gj} ihrer Waren und damit über die Beziehung

$$r_{Gj} = \frac{p_j}{p_G} \Leftrightarrow p_j = r_{Gj} p_G.$$

Die eigentlichen Bewertungen p_j ihrer Knoten bekommen sie also nie zu Gesicht. Sie vollzieht sich gewissermaßen hinter ihrem Rücken und kann ihnen daher (zumindest nach dem bisher Gesagten) reichlich egal sein. Denn ob sie p_G nun selbst festlegen oder ob sie diese Festlegung einer Zentralbank überantworten, sie können ein, von ihnen nicht gewolltes p_G jederzeit durch eine geeignete Umgestaltung ihrer Preise wirkungslos machen. Selbst unter Einbeziehung des Geldknotens, dessen Preis r_{GG} wegen

$$r_{GG} = \frac{p_G}{p_G} = 1$$

völlig unabhängig von seiner Knotenbewertung p_G ist, sind es eben nicht die Knotenbewertungen, die die Preise bestimmen, sondern es sind umgekehrt (hier allerdings mit Ausnahme der Geldware, deren Preis ja immer 1 sein muss) die Preise, die die Knotenbewertungen der Waren bestimmen. Auf die Realität der Tauschpartner hat die Bewertung p_G des Geldknotens im zeitlich *diskreten* Modell des transitiven Tausches also keine zwingende Auswirkung – egal ob frei verhandelt oder von einer Zentralbank festgelegt. Wenn sich aber die neu hinzutretende, stofflich ja völlig nutzlose Geldware nur über die von ihr aktuell verfügbare Gesamtmenge q_G und nicht auch über p_G auf die Realität der Tauschpartner auswirken kann, dann stellt sich sofort die Frage, nach welchen Regeln sonst q_G gesteuert werden muss, damit die Geldware auch tatsächlich die von ihr geforderte (und von ihr in der Realität ja auch tatsächlich erbrachte) Synchronisationsleistung erbringen kann. Eine willkürliche oder gar ein für allemal fixierte, vom aktuellen Tauschgeschehen ansonsten unabhängige Festlegung dieser Menge wäre dazu ja wohl schwerlich in der Lage. Wenn es also, wie wir gerade gesehen haben, im bisher entwickelten, zeitlich *diskreten* Modell des transitiven Tausches nicht möglich ist, aus dem, dort herrschenden *zeitunabhängigen* Zusammenhang zwischen p_G und q_G zwingende Regeln für die Steuerung der Geldmenge herzuleiten, dann muss es einen weiteren, *zeitabhängigen* Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen geben, die eine solche Herleitung erlauben. Da aber Geld als *die* kapitalistische Referenzware immer auch eine *Ware* wie jede andere ist bzw. sein muss, kann ein solcher Zusammenhang nicht nur für die Geldware alleine gelten, sondern muss sich auch auf alle anderen Waren erstrecken. Es muss also eine Beziehung der Form

$$q(t) = f\big(t, p(t)\big)$$

mit einer Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \dot{\mathbb{R}}^n \to \mathbb{R}^n$$

geben. Nur eine solche, zeitabhängige und die Geldware wie jede andere Ware behandelnde Beziehung zwischen $q(t)$ und $p(t)$ ist in der Lage, die hohe performative Akzeptanz der Geldware und den tiefen, geradezu religiösen Glauben an deren (synchronisierende) Wirkkraft zu erklären.

Um nun einen – wie wir meinen – nicht ganz unplausiblen Vorschlag für einen solchen funktionalen Zusammenhang machen zu können, bedarf es allerdings noch eines weiteren Konzeptes, das sich in den gängigen makroökonomischen Traditionen in sehr unterschiedlichen, um nicht zu sagen kontroversielllen Formen wiederfindet. Es handelt sich dabei um den Begriff des *Wertes*.

3 Wert

Werfen wir zunächst noch einmal einen Blick auf die kapitalistische Realität und beobachten wir an unserem Beispiel, *wie* aber vor allem unter *welchen Voraussetzungen* Hans und Gustav die Geldware in ihrer Tauschpraxis benutzen: Hans kann mit ihr im Frühjahr seine überschüssigen Kirschen an Gustav, den Weizenbauer, verkaufen, also Kirschen synchron gegen Geld tauschen um dann im Herbst seinerseits den von ihm benötigten Weizen bei Gustav zu kaufen, also Geld wiederum synchron gegen Weizen zu tauschen. Zwei synchrone Tauschhandlungen treten hier offensichtlich an die Stelle einer asynchronen. Damit diese *künstliche* Synchronisation über den ungefährlichen weil synchronen Umweg über das Geld aber auch nur den Funken einer Chance auf nachhaltige Umsetzung, also auf *performative Akzeptanz* durch die Tauschpartner haben kann, müsste eigentlich gewährleistet sein, dass Hans bereits im Frühjahr einigermaßen belastbar antizipieren kann, welche Menge an Kirschen er zu ihrem aktuellen Preis im Frühjahr verkaufen muss, um die für ihn bereits jetzt feststehende, aber erst im Herbst verfügbare Weizenmenge zu deren aktuellem Preis im Herbst kaufen zu können.

3.1 *Wert = Anteil

Diese Antizipation aber stößt nun in der Realität auf gewaltige Hindernisse. So kann etwa weder Hans noch irgendein anderer Tauschpartner erwarten, dass der Weizen im heurigen Herbst denselben oder einen auch nur annähernd gleichen Preis haben wird wie im vergangenen Jahr. Alle Knotenbewertungen und damit natürlich auch alle Preise bleiben ja weiterhin zu jedem Zeitpunkt frei verhandelbar. Diese Unwägbarkeit in den Preisen ist für Hans aber bei weitem noch nicht die schlimmste. So denke man etwa an die Möglichkeit einer Dürre oder eines Schädlingsbefalls, die sogar den Totalausfall der Weizenernte nach sich ziehen können. Ein Szenario, das Hans im Herbst sogar zwingen könnte, anstatt des gewünschten, von ihm benötigten Weizens nur etwas Vergleichbares – aber eben etwas völlig anderes – zu kaufen. Auch in diesem schlimmsten aller Fälle braucht Hans nun eine Garantie, dass sein Geld vom Frühjahr ihm im Herbst wenigstens den Kauf von etwas, dem gewünschten Weizen zumindest in Nutzen und Menge Vergleichbarem erlaubt. Nicht mehr – aber eben auch nicht weniger – wird sich der homo oeconomicus Hans von seiner Tauschwelt erwarten (dürfen).

Das Erste, was also Hans und damit natürlich auch alle anderen Tauschpartner von ihrem Geld verlangen müssen, ist, dass der *Anteil am Gesamtportfolio*, den sie mit einer bestimmten Geldmenge im Frühjahr erheischen können, auf eine noch zu bestimmende Weise jenem Anteil am Gesamtportfolio entspricht, dessen Kauf ihnen dieselbe Geldmenge im Herbst erlauben wird. Rufen wir uns dazu noch einmal in Erinnerung: Die transponierte erste Zeile, also die transponierte Preiszeile

$$r_G{}^T \stackrel{\text{def}}{=} (r_{1j}) = (r_{Gj}) \in \dot{\mathbb{R}}^n$$

der Tauschmatrix bildet den Vektor, dessen j-ter Eintrag die Menge an Geldeinheiten angibt, die im Tausch gegen *eine* Einheit der Ware j zu geben ist. Weiters geben die nie negativen Einträge q_j im Gesamtportfolio

$$q = (q_j) \in \mathbb{R}^n$$

an, wie viele Einheiten der j-ten Ware aktuell im System vorhanden sind. Das Produkt

$${r_G}^T q = \sum_{j=1}^{n} r_{Gj}\, q_j$$

gibt also die (fiktive) Menge an Geldeinheiten an, die man benötigen würde, um sämtliche, im System vorhandenen Waren zu kaufen. Sein Reziprokwert

$$\frac{1}{{r_G}^T q}$$

ist damit ein Maß für jenen Teil des Gesamtportfolios, den man gegen *eine* Geldeinheit tauschen kann.

3.2 Der Wert einer Geldmenge

Den von einer Geldmenge m_G erheischbaren Anteil am Gesamtportfolio

$$v(m_G) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{{r_G}^T q}\right) m_G = \frac{m_G}{{r_G}^T q} = \frac{m_G}{\sum_{j=1}^{n} r_{Gj} q_j} = \frac{m_G}{\sum_{j=1}^{n} \frac{p_j q_j}{p_G}} = \frac{m_G}{\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{p_G}} = \frac{p_G m_G}{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j} = \frac{p_G m_G}{p^T q}$$

nennen wir den *Wert der Geldmenge* m_G und halten fest, dass der so definierte Wert einer Geldmenge einerseits dimensionslos und andererseits natürlich von der Zeit abhängig ist. Präziser definiert ist er daher mittels

$$v(m_G, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_G(t) m_{tG}}{p(t)^T q(t)}.$$

3.3 Zur Wertkonstanz einer Geldmenge

Die Zeitabhängigkeit des Wertes einer Geldmenge, die in dieser Definition zu Tage tritt, ist nun eine zweifache. Während nämlich für hinreichend kleines

$$t_2\text{-}t_1$$

ein frei verhandelbarer Bewertungsvektor $p \in \dot{\mathbb{R}}^n$ im gesamten Intervall $[t_1, t_2]$ konstant, also insbesondere

$$p_{t_1} = p_{t_2} = p$$

bleibt,[6] ist dies für das Gesamtportfolio q keineswegs zwingend. Und das hat Konsequenzen, denn es wäre ja verlockend, dem motivierenden Beispiel von Hans und Gustav folgend, die Forderung

$$\frac{p_G m_G}{p^T q_{t_1}} = \frac{p_G m_G}{p^T q_{t_2}}$$

nach der Konstanz des Wertes einer Geldmenge m_G zu erheben. Dividiert man aber beide Seiten dieser Gleichung durch $p_G m_G$ dann sieht man, dass diese Forderung äquivalent ist zu

---

[6]Wäre eine mathematische Definition der freien Verhandelbarkeit nötig, so würden wir die Funktion f genau dann *frei verhandelbar* nennen, wenn f im interessierenden Bereich eine Stepfunktion ist.

$$p^T q_{t_1} = p^T q_{t_2},$$

was

$$p^T (q_{t_2} - q_{t_1}) = 0$$

erzwingen würde. Dies aber würde nichts anderes bedeuten, als dass jede Änderung des Gesamtportfolios (zumindest im hinreichend kleinen Intervall) orthogonal an die aktuelle Marktsituation gekoppelt werden müsste – eine Forderung, die in der Realität wohl nur planwirtschaftlich zu erfüllen wäre. Die kapitalistische Realität lässt sich unter Zugrundelegung einer solchen Forderung also nicht belastbar modellieren.[7]

3.4 Der Wert einer Ware

Unter dem Wert einer Ware verstehen wir jenen Anteil am Gesamtportfolio, den man mit *einer* Einheit dieser Ware erheischen kann. Nachdem wir den Wert einer Geldmenge m_G

$$v(m_G) = \frac{p_G m_G}{p^T q},$$

also den, von m_G erheischbaren Anteil am Gesamtportfolio, bereits kennen und die von einer Einheit der Ware i erheischbare Geldmenge gerade ihr Preis r_{Gi} ist, ergibt sich somit für ihren Wert

$$v_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p_G r_{Gi}}{p^T q} = \frac{p_G \frac{p_i}{p_G}}{p^T q} = \frac{p_i}{p^T q}.$$

Ein so definierter *Wert einer Ware* stellt also jenen Anteil am Gesamtportfolio dar, der durch den Erlös aus dem Verkauf *einer* ihrer Einheiten zu erheischen ist. Er bestimmt gewissermaßen zu jedem Zeitpunkt die Potenz, die eine Ware in den geldvermittelten (asynchronen) Tausch mitbringt. Damit gilt natürlich, dass sich die Tauschrelationen

$$r_{ij} = \frac{p_j}{p_i} = \frac{\frac{p_j}{p^T q}}{\frac{p_i}{p^T q}} = \frac{v_j}{v_i}$$

sowohl über ihre *Knotenbewertungen* als auch über ihre (gerade definierten) *Werte* ermitteln lassen. Man sieht sofort, dass ein so definierter Wert der einzelnen Ware in keiner Weise– also weder als Nutzen oder Grenznutzen noch als Quantum abstrakter Arbeit – innewohnt, sondern als begriffliche Bestimmung der Ware nur in einer Gesellschaft Sinn ergibt, in welcher der transitive Tausch von Waren zum zentralen Interaktionsschema geworden ist. Damit ist dieser Wertbegriff ein zutiefst gesellschaftlicher, der die aktuelle Marktsituation genauso zu einem zentralen Bestimmungsmerkmal der einzelnen Ware macht wie das aktuelle Gesamtportfolio und in weiterer Folge (nach dem Übergang von einer diskreten zu einer analogen Zeitschiene) auch die gesamtgesellschaftliche Produktivität.

[7] Natürlich umfasst das Gesamtportfolio q auch die Geldmenge. Doch selbst eine geeignete (reine) Geldmengenpolitik, durch die man die geforderte Orthogonalität natürlich auch erzwingen könnte, wäre fern von jeder kapitalistischen Realität.

4 Ein Modell des kapitalistischen Prozesses

Schon am Beginn unserer Suche nach den Ursachen der großen empirisch beobachtbaren, performativen Akzeptanz des Geldes haben wir festgestellt, dass es einen zeitabhängigen, funktionalen Zusammenhang zwischen dem Gesamtportfolio $q(t)$ und den Knotenbewertungen $p(t)$ geben muss. Nun gibt es, der Natur der Sache entsprechend, beliebig viele Möglichkeiten, einen solchen Zusammenhang zu modellieren. Wenn wir also hier *eine* dieser Möglichkeiten präsentieren, dann sei sich der Leser dieses Umstandes bewusst. Das präsentierte Modell erhebt also nicht den Anspruch, die kapitalistische Realität auch nur ansatzweise flächendeckend zu erfassen oder etwa gar *das* Kapitalismusmodell schlechthin zu sein. Wir versuchen lediglich, diesen Zusammenhang und seinen auf die Realität der Tauschpartner ausgeübten Einfluss unter Zugrundelegung einiger – wie wir meinen –, nicht ganz unplausibler Annahmen ein wenig fassbarer zu machen.

4.1 Der Kampf gegen die Entwertung

Im Gegensatz zu den meist äußerst elaborierten Modellen der gängigen makroökonomischen Traditionen werden wir den kapitalistischen Prozess hier vergleichsweise einfach modellieren. Und zwar als ständigen, die gesamte Produktion dominierenden Kampf der Tauschpartner gegen die permanente Entwertung ihrer Waren. Um dies mathematisch zu fassen, definieren wir zunächst den Vektor der Warenwerte

$$v \stackrel{\text{def}}{=} (v_i) = \left(\frac{p_i}{p^T q}\right) \in \dot{\mathbb{R}}^n$$

und stellen fest, dass dessen Schrumpfen an ein entsprechendes Wachstum seines reziproken Vektors

$$\bar{v} = \left(\frac{1}{v_i}\right) = \left(\frac{p^T q}{p_i}\right)$$

gekoppelt ist und umgekehrt. Dabei fällt sofort ins Auge, dass es sich beim Vektor $\bar{v}$ um nichts anderes handelt als um das Produkt der Tauschmatrix R mit dem Gesamtportfolio q. Es gilt ja zu jedem Zeitpunkt

$$\bar{v}=\overline{(v_\iota)}=\overline{\left(\frac{p_\iota}{p^T q}\right)}=\left(\frac{p^T q}{p_i}\right)=\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j q_j}{p_i}\right)=\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{p_i} q_J\right)=\left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j\right)=Rq.$$

In dieser Gleichung variieren natürlich sowohl R als auch q über die Zeit, sodass wir präziser

$$\overline{v(t)}=R(t)q(t)$$

schreiben müssen. Wächst also eine Komponente dieses Vektors, so sinkt der Wert der ihr entsprechenden Ware reziprok und umgekehrt.

4.2 Das Modell

Unser Modell koppelt nun die Änderung $q'(t)$ des Gesamtportfolios linear an $\overline{v(t)}$, den reziproken Vektor der Warenwerte. Mit einem Proportionalitätsfaktor

$$0<c \in \mathbb{R}$$

erhält das Modell im ersten Schritt also die Form

$$q'(t) = c\overline{v(t)} = cR(t)q(t).$$

Diese Beziehung besagt – von links nach rechts gelesen –, dass die durch den transitiven Tausch (und damit auch durch das Geld) vermittelte Produktion einer Ware und damit natürlich auch die Produktion, Distribution und der Einsatz (Verbrauch) aller dafür erforderlichen Halbfertigprodukte linear und reziprok von ihren Werten abhängt. Von rechts nach links gelesen besagt sie: Je mehr von einer Ware produziert wird, desto geringer wird ihr Wert.

Es ist klar, dass in ein realistischeres Modell auch noch Terme für einen etwaigen *natürlichen Zuwachs* $z(t)$ bzw. die *natürliche Verrottung* $v(t)$ aufgenommen werden müssen, sodass das Modell in einem weiteren Schritt dann mittels

$$s(t) \stackrel{\text{def}}{=} z(t) - v(t)$$

die Form

$$q'(t) = cR(t)q(t) + s(t)$$

annimmt. Offensichtlich handelt es sich dabei um ein inhomogenes System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit zeitabhängiger Koeffizientenmatrix $R(t)$.

4.3 Zur Lösung des Anfangswertproblems

Betrachtet man nun das zugehörige Anfangswertproblem

$$q'(t) = cR(t)q(t) + s(t) \text{ mit } q(t_0) = q_0,$$

dann stellt natürlich die Zeitabhängigkeit der Systemmatrix $R(t)$ die größte Herausforderung für eine Lösung dar. Zwar besitzt zumindest das homogene Problem

$$q'(t) = cR(t)q(t)$$

bekanntlich die relativ einfache Lösung

$$q(t) = e^{\int_{t_0}^{t} R(s)ds} q_0;$$

allerdings nur dann, wenn R für alle t_1, t_2 im Betrachtungszeitraum kommutiert, wenn also im gesamten Betrachtungszeitraum

$$R(t_1)R(t_2) = R(t_2)R(t_1)$$

gilt. Dass dies im vorliegenden Fall einer transitiven Matrix R bei weitem nicht erfüllt ist, kann sich der Leser schon an einfachsten Beispielen selbst klarmachen. Damit wäre man aber schon im homogenen Fall auf komplexere Methoden wie etwa eine Magnus-Entwicklung oder andere, zum Teil darauf aufbauende Verfahren angewiesen. Dies würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen.

Um im Rahmen dieser Arbeit aber doch zu einem (wenigstens qualitativen) Ergebnis zu gelangen, könnten wir uns an die Tatsache erinnern, dass im vorgeschlagenen Tauschmodell die Einträge der Tauschmatrix R (nach Lemma 1 ohnehin nur die Preiszeile) ja zu jedem Zeitpunkt frei verhandelbar sind. Man könnte also in gar nicht so schlechter Näherung davon ausgehen, dass $R(t)$ durch eine Stepfunktion gegeben ist. Das heißt aber, dass wir $R(t)$ zumindest in hinreichend kleinen Intervallen als zeitlich konstant annehmen können. Das vorliegende Anfangswertproblem hätte auf diesen Intervallen dann die Form

$$q'(t) = cRq(t) + s(t) \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

und wäre damit tatsächlich ein inhomogenes System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, mit konstanten Koeffizienten. Die einzige, noch nicht bestimmte Größe in diesem System ist die Bewertung des Geldknotens p_G, deren spezielle Rolle bei der Steuerung der Geldmenge wir in den Forderungen an die Geldware (Abschnitt 2.3) beschrieben haben. Wir werden uns dieser Frage im Anschluss an diesen Abschnitt zuwenden. Zur Erlangung einer geschlossenen Darstellung der Lösung des vorliegenden Anfangswertproblems ist eine spezielle Bewertung des Geldknotens nämlich unerheblich. Der Leser möge etwa $p_G = 1$ setzen.

Wir stellen zunächst einmal fest, dass die Lösung des vorliegenden Problems existiert und durch den Ausdruck

$$q(t) = e^{cR(t-t_0)}q_0 + \int_{t_0}^{t} e^{cR(t-\sigma)}\, s(\sigma)d\sigma$$

gegeben ist, sodass sich eine Lösung über längere Zeiträume hinweg über eine Sequenz dieser Lösungen zusammensetzen ließe. Um die Darstellung nicht unnötig zu verkomplizieren, beschränken wir uns im Folgenden auf den Fall $s(t) = 0$, betrachten also nur die Lösung des homogenen Systems

$$q(t) = e^{cR(t-t_0)}q_0.$$

Diese kann dann mit ein wenig technischem Aufwand leicht zu einer Lösung des inhomogenen Systems erweitert werden. Eine geschlossene Darstellung ihrer Komponentenfunktionen setzt nun im allgemeinen Fall die Diagonalisierbarkeit der Koeffizientenmatrix voraus. Wie aber die folgende Überlegung zeigt, ist diese im vorliegenden Fall nicht gegeben. Für transitive Matrizen R, die sich nach Lemma 1 ja immer als R=$\bar{p}p^T$ darstellen lassen, ist nämlich wegen

$$R\bar{p}=(\bar{p}p^T)\bar{p}=\bar{p}(p^T\bar{p})=\bar{p}\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{1}{p_j}=\bar{p}\sum_{j=1}^{n} 1=\bar{p}n=n\bar{p}$$

$\bar{p}$ immer ein Eigenvektor von R zum Eigenwert n. Ist nun q ein weiterer Eigenvektor von R, diesmal zum Eigenwert λ (egal ob λ=n oder $\lambda \neq n$), dann ist q wegen

$$\lambda q=Rq=(\bar{p}p^T)q=\bar{p}(p^Tq)=\underbrace{(p^Tq)}_{\in\dot{\mathbb{R}}}\bar{p} \Leftrightarrow q=\frac{p^Tq}{\lambda}\bar{p},$$

immer linear von $\bar{p}$ abhängig. Die Hoffnung auf n linear unabhängige Eigenvektoren und damit auf die Diagonalisierbarkeit von R ist damit bereits im Keim erstickt. Das ist aber kein Unglück, denn für unseren Fall gelten die folgenden Ergebnisse:

Korollar 1: Für eine transitive Matrix $R \in \dot{\mathbb{R}}^{n\times n}$ und $0 < \kappa \in \mathbb{N}$ gilt: R^κ=$n^{\kappa-1}R$.

Beweis: Für κ=1 behauptet das Korollar, dass R^1=$n^{(1-1)}R$=n^0R=$1R$=R ist, was natürlich von jeder Matrix erfüllt wird. Für transitive Matrizen sagt nun Lemma 1, dass es ein $p \in \dot{\mathbb{R}}^n$ gibt, sodass R=$\bar{p}p^T$ ist. Sei also $\kappa \geq 2$ und sei das Korollar richtig für alle $0 < \lambda$<κ, dann erhalten wir

$$R^\kappa = R^{\kappa-1}R = n^{(\kappa-2)}RR = n^{(\kappa-2)}(\bar{p}p^T)(\bar{p}p^T) = n^{(\kappa-2)}\bar{p}(p^T\bar{p})p^T=$$
$$n^{(\kappa-2)}\bar{p}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}p_i\right)p^T = n^{(\kappa-2)}\bar{p}(\textstyle\sum_{i=1}^{n}1)p^T = n^{(\kappa-2)}\bar{p}np^T = n^{(\kappa-2)}n\bar{p}p^T = n^{(\kappa-1)}R.\ \square$$

Korollar 2: Für eine transitive Matrix $R \in \dot{\mathbb{R}}^{n\times n}$ gilt: $e^{(cR)t}$=I+$\frac{e^{cnt}-1}{n}R$.

Beweis: Sei $R \in \dot{\mathbb{R}}^{n\times n}$ transitiv, dann gilt mit Korollar 1:

$$e^{(cR)t}=I+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{c^\kappa R^\kappa t^\kappa}{\kappa!}=I+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(c^\kappa n^{\kappa-1}R)t^\kappa}{\kappa!}=I+\frac{1}{n}R\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{(cnt)^\kappa}{\kappa!}=$$

$$I+\tfrac{1}{n}(e^{cnt}-I)R=I+\tfrac{1}{n}e^{cnt}R-IR=I+\tfrac{1}{n}e^{cnt}R-R=I+\tfrac{e^{cnt}-1}{n}R. \ \square$$

Damit ist dann die Lösung des homogenen Anfangswertproblems in der Form

$$q(t)=\left(I+\frac{e^{cn(t-t_0)}-1}{n}R\right)q_0=q_0+\left(\frac{e^{cn(t-t_0)-1}}{n}\right)Rq_0$$

gegeben. Für die einzelnen Komponenten $q_i(t)$ erhalten wir

$$q_i(t)=q_i(t_0)+\left(\frac{e^{cn(t-t_0)}-1}{n}\right)\frac{p^Tq(t_0)}{p_i}$$

Erinnert man sich jetzt noch daran, dass

$$r_{Gi}=\frac{p_i}{p_G}\Leftrightarrow\frac{1}{p_i}=\frac{1}{r_{Gi}p_G},$$

dann erhält die Lösung des homogenen Problems schließlich die Gestalt

$$q_i(t)=q_i(t_0)+\left(\frac{e^{cn(t-t_0)}-1}{n}\right)\frac{p^Tq(t_0)}{r_{Gi}p_G}.$$

Man erkennt sofort, dass für die Portfolioentwicklung $q_i(t)$ der i-ten Ware nicht nur ihr Preis r_{Gi}, eine entscheidende Rolle spielt, sondern mit p_G auch die Bewertung des Geldknotens.

4.4 Zur Bewertung des Geldknotens

Nun sind im betrachteten Intervall sowohl r_{Gj} wie auch p_G konstant und somit bereits am Beginn t_0 festgelegt bzw. festzulegen. Für die Preise $r_{Gj}(2\le j\le n)$ erledigen das ausschließlich die Tauschpartner in freier Verhandlung. Zur Festlegung von p_G aber benötigen wir gemäß unserer Forderungen an die Geldware (Abschnitt 2.3) noch eine Beziehung zu $q_G(t_0)$. Setzt man aber t_0 in die vorliegende Lösung ein, dann erhält man dabei gerade einmal die, für unsere Zwecke völlig unbrauchbare Anfangsbedingung $q(t_0)=q_0$. Um also den geforderten Zusammenhang zwischen $q_G(t_0)$ und p_G zu erhalten, müssen wir zurück zum ursprünglichen Anfangswertproblem

$$q'(t)=cRq(t)+s(t) \text{ mit } q(t_0)=q_0,$$

bzw. zu dessen erster, also zu dessen Geldkomponente. Für diese gilt ja

$$q_G{}'(t)-s_G(t)=c\sum_{j=1}^{n}r_{Gj}\,q_j(t)=\frac{c\sum_{j=1}^{n}p_j\,q_j(t)}{p_G}=\frac{cp_Gq_G(t)}{p_G}+\frac{c\sum_{j=2}^{n}p_j\,q_j(t)}{p_G}$$
$$=cq_G(t)+\frac{c\sum_{j=2}^{n}p_j\,q_j(t)}{p_G}$$

und damit wegen $s_G(t)=0$ (Geld wächst ja weder natürlich zu noch verrottet es)

$$q_G{}'(t)-cq_G(t)=\frac{c\sum_{j=2}^{n}p_jq_j(t)}{p_G}.$$

Dies liefert an der Stelle $t = t_0$ schließlich die geforderte Beziehung

$$p_G = \frac{c\sum_{j=2}^{n} p_j q_j(t_0)}{q_G{}'(t_0) - c q_G(t_0)},$$

die angibt, wie die Bewertung des Geldknotens am Beginn jedes Intervalls festzulegen ist. Diese Beziehung ist nicht normativ gesetzt, sondern aus der Struktur des transitiven Tausches und der Modellannahme eines ständigen Kampfes der Tauschpartner gegen die Entwertung ihrer Waren abgeleitet. Sie bestimmt die Bewertung des Geldknotens eindeutig durch die Bewertungen und Mengen aller anderen Waren sowie durch die aktuell vorhandene Geldmenge und deren Änderungsrate. Diese Gleichung liefert also die strukturelle Steuerungsregel, der eine Zentralbank folgen *muss*, wenn sich die Geldware wie jede andere Ware verhalten soll. Die Zentralbank erscheint in diesem Rahmen nicht als Institution mit freien Ermessensspielräumen, sondern als Vollzugsorgan einer Bedingung, die das Tauschsystem selbst hervorbringt.

5 Zusammenfassung

Wir möchten an dieser Stelle noch einmal darauf hinweisen, dass sich diese Arbeit als request for comment versteht. Ausgehend von Bestimmungen der Begriffe *Tausch*, Geld und *Wert* entwickeln wir darin ein Modell des kapitalistischen Prozesses, das zwar keinen Anspruch auf eine flächendeckend korrekte Beschreibung der kapitalistischen Realität erhebt, das aber auf der, wie wir meinen, nicht ganz unplausiblen Annahme basiert, es handle sich dabei im Wesentlichen um einen ständigen Kampf der Tauschpartner gegen die permanente Entwertung ihrer Waren.

5.1 Tausch

Eingangs charakterisieren wir in Abschnitt 1 den kapitalistischen Tausch durch die drei Strukturmerkmale *Synchronizität*, *Transparenz,* vor allem aber durch seine *Transitivität*. Das zentrale Ergebnis dieses Abschnittes präzisiert Lemma 1 in Abschnitt 1.5: Eine Matrix R ist *genau dann* transitiv, wenn sie die Form

$$R = \bar{p}p^T$$

aufweist, also vollständig durch einen *einzigen* Knotenbewertungsvektor p erzeugt wird. Dies schränkt die freie Verhandelbarkeit von ursprünglich – also in einem reinen Äquivalententausch – möglichen $n\,(n-1)/2$ Kantenbewertungen im Tauschgraphen auf nunmehr lediglich n Knotenbewertungen ein. Damit entreißt die Transitivität ihres Tausches den Tauschpartnern das Regime über die Beziehungen *zwischen* ihren Waren indem es dieses den einzelnen, voneinander isolierten Waren selbst überantwortet. Dieser Umstand ist dabei nicht bloß notwendige Folge der Tauschtransitivität sondern auch deren hinreichende Voraussetzung. Damit kann im transitiven Tausch jede beliebige Ware zur einer *Referenzware*, also gewissermaßen zum Maßstab für alle anderen Waren werden.

5.2 Geld

Abschnitt 2 wirft dann die Frage auf, wodurch in einem *synchronen*, transitiven Tauschmodell strukturell *asynchrone* Tauschhandlungen „synchronisiert" werden (können). Die einfache Antwort lautet natürlich: durch das *Geld*. Abschnitt 2.2 argumentiert dann, dass Geld genau wie jede andere Ware, ausschließlich durch die beiden Größen p_G und q_G bestimmt, ins Modell genommen werden muss, wenn der kapitalistische Prozess auf der Basis des transitiven Tausches modelliert werden soll. Denn obwohl stofflich völlig nutzlos, tauscht es sich ja offensichtlich problemlos (und transitiv) gegen jede andere Ware. Damit aber ist es Referenzware (Abschnitt 1.6) und als solche zwingend eine Ware wie jede andere. Abschnitt 2.3 zeigt dann, dass es im zeitlich *diskret* modellierten transitiven Tausch keinen, die Realität zwingend beeinflussenden Zusammenhang zwischen Geldmenge q_G und Knotenbewertung p_G geben kann, zumal eine Änderung von p_G keineswegs zwingend auch zu einer Änderung der Tauschmatrix führen muss. Ein solcher – funktionaler – Zusammenhang der beiden Größen ist aber zwingend erforderlich, wenn die Steuerung der Geldmenge (in Übereinstimmung mit der Realität) nicht rein willkürlich sondern auf der Basis noch zu bestimmender Regeln erfolgen soll. Es ist deshalb unabdingbar, die (analoge) Zeit als wesentlichen Parameter in das Modell aufzunehmen, um einen *zeitabhängigen* funktionalen Zusammenhang der beiden Größen finden oder zumindest herstellen zu können.

5.3 Wert

Um einen solchen zeitabhängigen, funktionalen Zusammenhang modellieren zu können, führt Abschnitt 3 den *Wert* als neues Konzept in das Modell ein. Abschnitt 3.1 argumentiert, dass die Tauschpartner das Geld nur dann als Synchronisationsmedium akzeptieren, wenn der durch eine Geldmenge zum Zeitpunkt t_1 erheischbare Anteil am Gesamtportfolio in einem noch zu bestimmenden Sinn jenem Anteil am Gesamtportfolio vergleichbar ist, den man mit dieser Geldmenge zum Zeitpunkt t_2 erheischen kann. Als Maßeinheit dieses Anteils wird dann der reziproke Preis des Gesamtportfolios $1/{p_G}^T q$ eingeführt. Aufbauend auf dieser Einheit entwickelt der Rest von Abschnitt 3 den Wert v_i einer Ware als

$$v_i = \frac{p_i}{p^T q}.$$

5.4 Ein Modell des kapitalistischen Prozesses

Abschnitt 4 präsentiert dann abschließend *ein* mögliches, vergleichsweise einfaches, auf dem transitiven Tausch basierendes Modell des kapitalistischen Prozesses, dem in Abschnitt 4.1 die Annahme zugrunde gelegt wird, dass der kapitalistische Prozess im Wesentlichen als ein andauernder Kampf der Tauschpartner gegen die permanente Entwertung ihrer Waren betrachtet werden kann. Diese Annahme findet dann in Abschnitt 4.2 ihre mathematische Präzisierung in Form eines inhomogenen Systems linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit zeitabhängiger Koeffizientenmatrix. Abschnitt 4.3 widmet sich dann der Lösung des zugehörigen Anfangswertproblems. Dazu wird das Ausgangsintervall in hinreichend kleine Intervalle zerlegt, in denen die ursprünglich zeitabhängige Koeffizientenmatrix als konstant betrachtet werden kann und das Problem daher die einfache Form

$$q'(t) = cRq(t) + s(t) \text{ mit } q(t_0) = q_0$$

annimmt, dessen Lösung bekanntlich durchaus

$$q(t) = e^{cR(t-t_0)} q_0 + \int_{t_0}^{t} e^{cR(t-\sigma)}\, s(\sigma) d\sigma$$

gegeben ist. Die Korollare 1 und 2, die für transitives R die Gleichungen

$$R^{\kappa} = n^{\kappa-1} R \text{ und damit. } e^{(cR)t} = I + \frac{e^{cnt}-1}{n} R$$

nachweisen, erlauben es dann, die Lösung (hier nur jene des homogenen Problems) in der geschlossenen Form

$$q(t) = q_0 + \left(\frac{e^{cn(t-t_0)-1}}{n}\right) R q_0$$

darzustellen. Abschnitt 4.4 leitet schließlich aus der Geldkomponente des Anfangswertproblems mit

$$p_G = \frac{c \sum_{j=2}^{n} p_j \, q_j(t_0)}{q_G{}'(t_0) - c q_G(t_0)}$$

jene Beziehung her, die wir am Ende von Abschnitt 2.3 für die Geldware gefordert haben. Sie bildet gewissermaßen die strukturelle Steuerungsregel für die Geldpolitik der Zentralbank.